Révisions

Équations différentielles ; Expressions intégrales diverses ; Suites récurrentes

Exercice 1 Soit $(E)\colon y' - y = e^{-x^2}$.

1. Énoncer le théorème d'unicité à un problème de Cauchy. Montrer que (E) admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer les solutions de (E) en fonction de $u\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Soit $m \in \,]0,1[$.

1. Déterminer les solutions de l'équation $(1-m)xF'(x) = mF(x)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer les fonctions continues sur $[0,+\infty[$ vérifiant $\forall x \geq 0,\ \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = mx\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$. Calculer $\int_0^\pi (f(t) + f''(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer les fonctions $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f + f'' \geq 0$.

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (le cas $\alpha = 0$ est différent)

$$y''(t) - (1+\alpha)y'(t) + \alpha y(t) = e^{(1+\alpha)t}.$$

Exercice 5 Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E.

1. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
2. Déterminer les $f \in E$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.

Exercice 6 On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un développement limité d'une solution de l'équation différentielle à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Expressions intégrales diverses

Exercice 7 Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0$.

Exercice 8 Étudier et tracer le graphe de la fonction $f\colon x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Exercice 9

1. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) + f'(x) \to 0$. Montrer que $f(x) \to 0$.
   Indication : *Poser* $g(x) = f(x) + f'(x)$.
2. Soit f $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x) + 2f'(x) + f''(x) \to 0$. Que dire de f ?
3. ★ Soit f $\mathcal{C}^2$ telle que $f(x) + f'(x) + f''(x) \to 0$. Que dire de f ?

Exercice 10 ★ Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\int_0^1 |f' - f| \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ?

Exercice 11 ★ Soient $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$ telle que $||K||_\infty < 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Étudier l'existence et l'unicité de $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,1],\ g(x) - \int_0^1 K(x,t)g(t)\,dt = f(x)$.

Suites récurrentes

Exercice 12 Soit $a \in \mathbb{C}$ et E l'ensemble des suites complexes telles que $\forall n,\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
3. Déterminer la suite de E vérifiant $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 13 Soit $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que $[0,1]$ est stable par $f\colon x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$. Conclusion ?
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ admet un unique point fixe α dans $[0,1]$.
3. Montrer que (u_n) converge, puis que $u_n \to \alpha$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$.

Exercice 14 On considère une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan u_n$.

1. Montrer que (u_n) est monotone, et expliciter, en fonction de u_0, son sens de variation.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer les fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 15

1. Étudier la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n,\ u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} = 1$.
2. ★ Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \to 1$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 16 ★ On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n, u_n = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$.

1. Etudier la limite de (u_n).
2. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $\frac{1}{u_n} - n \sim \ln(n)$.